Шифр: С-13

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
математика
2018/2019
Ленинградская область

Район Гатчинский

Школа СОШ 9

Класс 11

ФИО Забияков Сергей Владимирович

С-13

1	2	3	4	5	Σ
7	3	x	4	x	14

№1

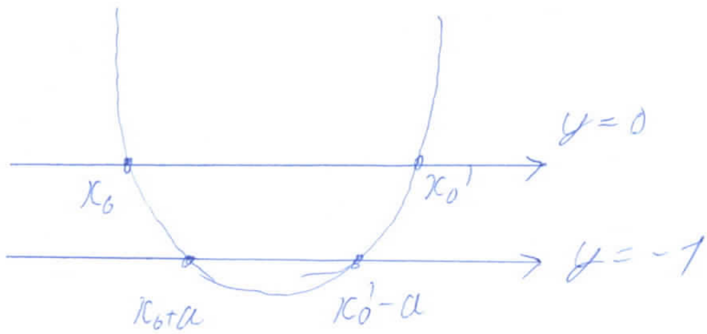
Ответ: среди этих 10 человек могло быть не больше 8 рыцарей, максимум 8 рыцарей.

Оценка: Допустим рыцарей было больше 8, тогда найдётся рыцарь, который заявит, что его задуманное число больше 9, следовательно ему придётся соврать второй фразой - противоречие.

Пример: Первые 8 - рыцари. Первый загадает 2, второй 3, ..., восьмой 9. Остальные два лжецы. Они загадают 5 и 6. Вначале 1 рыцарь скажет, что он загадал число больше 1, второй - больше 2 и т.д. Два лжеца скажут, что они загадали числа больше 9 и 10. В конце восьмой рыцарь скажет, что его число меньше 10, седьмой - меньше 9 и т.д. Потом два лжеца скажут, что их числа меньше 1 и 2 //

№2 С-13

Если трёхчлен x^2+ax+b - имеет 1 целый корень, то трёхчлен $x^2+ax+b+1$ - не имеет корней. Значит у трёхчлена x^2+ax+b - 2 различных корня. Пусть x_0 и x_0' $(x_0' > x_0)$. Допустим у трёхчлена $x^2+ax+b+1$ - тоже 2 разл корня, тогда они имеют вид x_0+a и $x_0'-a$, где a - целые и больше 0.

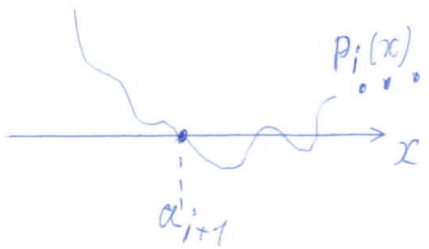


Тогда по теорем Виета $x_0x_0'=b$, а $(x_0+a)(x_0'-a)=b+1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_0x_0'=(x_0+a)(x_0'-a)-1 \Rightarrow a(x_0'-x_0)=1$. Так как a, x_0, x_0' - целые и $a>0$ и $x_0'-x_0>0$, то $a=1$ и $x_0'-x_0=1$. Значит корни трёхчлена x^2+ax+b совпадают с корнями трёхчлена $x^2+ax+b+1$ — противоречие. Значит трёхчлен $x^2+ax+b+1$ - имеет 1 корень $\Rightarrow x^2+ax+b+2$ - не имеет корней //

№4 C-15

База: Заметим, что найдётся a_{i+1}, такое что $a_i < 0$ и $i \geqslant 2018$. Иначе $P_n(x)$ при каком-то n не будет иметь корней $\Rightarrow$ последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots$ не бесконечная.

Переход: Докажу, что наим. корень многочлена $P_i(x) \cdot x^2 + a_{i+1}$ меньше a_{i+1}. Так как $a_{i+1} < 0$ и $x^2 \geqslant 0$, то для выполнения равенства $P_i(x) \cdot x^2 + a_i + 1 = 0$ $P_i(x)$ должен быть больше 0. Так как $P_i(x)$ — многочлен $2i$ степени и коэффициент при x^{2i} равен 1, а корень a_{i+1} — наим. корень, то $P_i(z) > 0$, где $z < a_{i+1}$



(значение $P_i(z) \in (0; +\infty)$)

$\Downarrow$

Один из корней многочлена $P_i(x) \cdot x^2 + a_{i+1}$ меньше a_{i+1}, следовательно наим. корень меньше a_{i+1} $\Rightarrow$ $a_{i+2} < a_{i+1}$

Чистовик

С – 13

1	2	3	4	5	Σ
7	7	X	0	X	14

№ 1 (11.6)

Пусть загаданные числа n, $n+1$, $n+2$, $n+3$

I $n = 2p$ (так как $n > 100 \Rightarrow p > 50$)

Выбираем числа $n+1$, $n+2$, $n+3$, их сумма –

$- 3n+6 = 3(n+2) = 3(2p+2) = \underline{3 \cdot 2 \cdot (p+1)}$ $(p+1 > 3$ и $p+1 > 2)$

II $n = 2z+1$ $(z > 50)$

Числа: n, $n+1$, $n+2$

Сумма $3n+3 = 3(n+1) = 3 \cdot (2 \cdot z+1+1) = 3 \cdot 2\underline{(z+1)}$

$(z+1 \neq 3$ и $z+1 \neq 2)$

Черновик

№ 2 (11.7)

С-13

Докажу, что $x_{n+1} - x_n < 0$

$$x_{n+1} - x_n = 2^n\left(2\left(a^{\frac{1}{2^{n+1}}} - 1\right) - \left(a^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)\right) =$$

$$= 2^n\left(2\left(a^{\frac{1}{2^{n+1}}} - 1\right) - \left(a^{\frac{1}{2^{n+1}}} - 1\right)\left(a^{\frac{1}{2^{n+1}}} + 1\right)\right) =$$

$$= 2^n\left(\left(a^{\frac{1}{2^{n+1}}} - 1\right)\left(1 - a^{\frac{1}{2^{n+1}}}\right)\right) - \text{что} < 0$$

Так как $a \neq 1$ и $x_n = 2^n(\sqrt[2^n]{a} - 1)$, то либо все числа в последовательности < 0 либо больше 0 $\Rightarrow$ $x_{n+1} - x_n < 0$ и x_{n+1}, x_n - одного знака $\Rightarrow x_n > x_{n+1}$

Чистовик

№ 4 (11.9) (-13

Оценка на 28: Допустим в бассейн ходило более 28 учеников, тогда их было не меньше 29 и так как все ходили разное число раз, ~~то среди этих~~ (и не меньше 2), то среди этих 29 учеников найдётся ученик, который ходил в бассейн 30 раз, что противоречит условию, т.к. для каждого ученика должен найтись ученик, который в какой-то день ходил без него.

Пример: